4. Ријешити ј-ну

$$\Delta u(x,y) = x$$

$$u(e^{it}) = \sin 2t + \frac{1}{8}\cos t, \quad u(2e^{it}) = \sin 4t + \cos t, \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$$

$$u(r) = \frac{r^3}{8}, \quad u(ir) = 0, \qquad 1 \le r \le 2$$

на скупу $\Omega = \{ z = x+iy \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 2, \ 0 < \arg z < \frac{\pi}{2} \}$.

Рјешење:

Нађимо партикуларно рјешење. Претпоставимо да је

$$u_p = Ax^3 + Bx^2y + Cxy^2 + Dy^3$$

$$u_{pxx} = 6Ax + 2By$$

$$u_{pyy} = 2Cx + 6Dy$$

$$\Delta u_p = (6A+2C)x + (6D+2B)y = x \Rightarrow 6A+2C = 1$$

$$6D + 2B = 0$$

За избор коефицијената A, B, C и D користићемо и граничне услове.

$$\ulcorner \ x = r\cos t$$

$$y = r\sin t \ \lrcorner$$

$$u_h + u_p = u \Rightarrow u_h = u - u_p$$

$$\Delta u_h = 0$$

$$u_h(e^{it}) = u(e^{it}) - u_p(e^{it}) = \sin 2t + \frac{1}{8}\cos t - u_p(e^{it}) =$$

$$= \sin 2t + \frac{1}{8}\cos t - \left(A\cos^3 t + B\cos^2 t\sin t + C\cos t\sin^2 t + D\sin^3 t\right), \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$$

$$u_h(2e^{it}) = u(2e^{it}) - u_p(2e^{it}) = \sin 4t + \cos t - u_p(2e^{it}) =$$

$$= \sin 4t + \cos t - 8\left(A\cos^3 t + B\cos^2 t\sin t + C\cos t\sin^2 t + D\sin^3 t\right), \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$$

$$u_h(r) = u(r) - u_p(r) = \frac{r^3}{8} - u_p(re^{i0}) = \frac{r^3}{8} - Ar^3, \quad 1 \le r \le 2$$

$$u_h(ir) = u(ir) - u_p(ir) = 0 - u_p(re^{i\frac{\pi}{2}}) = -Dr^3, \quad 1 \le r \le 2$$

Видимо да, за избор $A=\frac{1}{8}$, $B=0$, $C=\frac{1}{8}$, $D=0$ наш задатак постаје

$$\Delta u_h = 0$$

$$u_h(e^{it}) = \sin 2t + \frac{1}{8}\cos t - \frac{1}{8}\cos^3 t - \frac{1}{8}\cos t \sin^2 t =$$

$$= \sin 2t + \frac{1}{8}\left(\cos t - \cos t\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right)\right) = \sin 2t \quad , \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$$

$$u_h(2e^{it}) = \sin 4t + \cos t - 8\left(\frac{1}{8}\cos^3 t + \frac{1}{8}\cos t \sin^2 t\right) =$$

$$= \sin 4t + \cos t - 8 \cdot \frac{1}{8} \cdot \cos t(\cos^2 t + \sin^2 t) = \sin 4t \ , \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$$

$$u_h(r) = \frac{r^3}{8} - \frac{r^3}{8} = 0 \ , \ u_h(ir) = 0 - 0 = 0, \quad 1 \le r \le 2$$

Даље, раставимо $u_h = \vartheta^1 + \vartheta^2$, где ϑ^i задовољавају

$$\Delta \vartheta^1 = 0 \qquad\qquad \Delta \vartheta^2 = 0$$

$$\vartheta^1(e^{it}) = \sin 2t, \ \vartheta^1(2e^{it}) = 0, \qquad \vartheta^2(e^{it}) = 0, \ \vartheta^2(2e^{it}) = \sin 4t, \ 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$$

$$\vartheta^1(r) = 0, \ \vartheta^1(ir) = 0 \quad , \qquad \vartheta^2(r) = 0, \ \vartheta^2(ir) = 0 \quad , 1 \le r \le 2$$

Решимо ове проблеме. Прво, уведимо поларне координате

$$\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \end{cases}$$

па добијамо

$$\frac{1}{r}\vartheta^i_r + \vartheta^i_{rr} + \frac{1}{r^2}\vartheta^i_{tt} = 0$$

$$\vartheta^1(1,t) = \sin 2t, \ \vartheta^1(2,t) = 0, \ \vartheta^2(1,t) = 0, \ \vartheta^2(2,t) = \sin 4t, \ 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$$

$$\vartheta^i(r,0) = 0 \ , \ \vartheta^i\left(r, \frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad i = 1,2 \ , \ 1 \le r \le 2$$

Претпоставићемо да је $\vartheta^i(r,t) = R^i(r)\,T^i(t)$, $i = 1,2$. Добијамо

$$\frac{1}{r}R^{i\prime}(r)T^i(t) + R^{i\prime\prime}(r)\,T^i(t) + \frac{1}{r^2}R^i(r)\,T^{i\prime\prime}(t) = 0 \ , \quad i = 1,2$$

$$R^1(2) = 0, \ R^2(1) = 0$$

$$T^i(0) = 0 \ , \ T^i\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad i = 1,2$$

Сређивањем једначине добијамо

$$-\frac{r^2 R^{i''}(r) + r R^{i'}(r)}{R^i(r)} = \frac{T^{i''}(t)}{T^i(t)} = -\lambda$$

односно
$$r^2 R^{i''}(r) + r R^{i'}(r) - \lambda R^i(r) = 0$$
$$T^{i''}(t) + \lambda T^i(t) = 0$$

1° $\lambda < 0 \Rightarrow$ Карактеристични полином је

$$k^2 + \lambda = 0$$
$$k^2 = -\lambda$$
$$k = \pm\sqrt{-\lambda} \Rightarrow T^i(t) = c_1^i e^{\sqrt{-\lambda}\, t} + c_2^i e^{-\sqrt{-\lambda}\, t}$$

$$T^i(0) = c_1^i + c_2^i = 0 \Rightarrow c_2^i = -c_1^i$$
$$T^i\left(\frac{\pi}{2}\right) = c_1^i e^{\sqrt{-\lambda}\frac{\pi}{2}} + c_2^i e^{-\sqrt{-\lambda}\frac{\pi}{2}} = c_1^i\left(e^{\sqrt{-\lambda}\frac{\pi}{2}} - e^{-\sqrt{-\lambda}\frac{\pi}{2}}\right) = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T^i(t) = 0 \Rightarrow \vartheta^i(r,t) = 0 \quad \times$$

2° $\lambda = 0 \Rightarrow T^{i''}(t) = 0 \Rightarrow T^i(t) = a^i t + b^i$

$$\left.\begin{array}{l} T^i(0) = b^i = 0 \\ T^i\left(\frac{\pi}{2}\right) = a^i \frac{\pi}{2} = 0 \Rightarrow a = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow T^i(t) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vartheta^i(r,t) = 0 \quad \times$$

3° $\lambda > 0 \Rightarrow$ Карактеристични полином је

$$k^2 + \lambda = 0$$
$$k^2 = -\lambda$$
$$k = \pm i\sqrt{\lambda} \Rightarrow T^i(t) = c_1^i \cos\sqrt{\lambda}\, t + c_2^i \sin\sqrt{\lambda}\, t$$
$$T^i(0) = c_1^i = 0$$
$$T^i\left(\frac{\pi}{2}\right) = c_2^i \sin\sqrt{\lambda}\frac{\pi}{2} = 0$$

За $c_2^i = 0$ добијамо $T^i(t) = 0$, односно $\vartheta^i(r,t) = 0$. Како ми тражимо нетривијална решења, то је $c_2^i \neq 0 \Rightarrow \sin\sqrt{\lambda}\frac{\pi}{2} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sqrt{\lambda_n}\frac{\pi}{2} = n\pi, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \lambda_n = 4n^2$$

Дакле, $T_n^i(t)=c_{2n}^i \sin 2nt$.

Нађимо одговарајуће $R_n^i(r)$. Ова ф-ја задовољава ј-ну

$$r^2 R_n^{i''}(r)+r R_n^{i'}(r)-\lambda_n R_n^i(r)=0$$

Уведимо смену $r=e^z$, односно $z=\ln r$. Тада је

$$R_n^{i'}(r)=R_n^{i'}(z)\cdot\frac{1}{r}$$

$$R_n^{i''}(r)=R_n^{i''}(z)\frac{1}{r^2}-\frac{1}{r^2}R_n^{i'}(z)$$

па је

$$\cancel{r^2}\cdot\frac{1}{\cancel{r^2}}\left(R_n^{i''}(z)-R_n^{i'}(z)\right)+\cancel{r}\cdot\frac{1}{\cancel{r}}\cdot R_n^{i'}(z)-\lambda_n R_n^i(z)=0$$

$$R_n^{i''}(z)-\lambda_n R_n^i(z)=0$$

Карактеристични полином је

$$k^2-\lambda_n=0$$

$$k^2=\lambda_n$$

$$k=\pm\sqrt{\lambda_n}\Rightarrow R_n^i(z)=d_{1n}^i e^{\sqrt{\lambda_n}z}+d_{2n}^i e^{-\sqrt{\lambda_n}z}$$

$$R_n^i(z)=d_{1n}^i\left(e^z\right)^{\sqrt{\lambda_n}}+d_{2n}^i\left(e^z\right)^{-\sqrt{\lambda_n}}$$

$$R_n^i(r)=d_{1n}^i r^{\sqrt{\lambda_n}}+d_{2n}^i r^{-\sqrt{\lambda_n}}$$

$$R_n^1(2)=0\Rightarrow d_{1n}^1 2^{2n}+d_{2n}^1 2^{-2n}=0$$

$$d_{2n}^1=-d_{1n}^1\cdot 2^{4n}=-d_{1n}^1\cdot 16^n$$

$$R_n^2(1)=0\Rightarrow d_{1n}^2+d_{2n}^2=0\Rightarrow d_{2n}^2=-d_{1n}^2$$

Дакле, $R_n^1(r)=d_{1n}^1\left(r^{2n}-16^n r^{-2n}\right)$

$$R_n^2(r)=d_{2n}^2\left(r^{2n}-r^{-2n}\right)$$

Одавде је

$$\vartheta^1_0(r,t)=\sum_{n=1}^{\infty} R^1_n(r)\,T^1_n(t)=\sum_{n=1}^{\infty} c^1_{2n}\,d^1_{1n}\left(r^{2n}-16r^{-2n}\right)\cdot\sin 2nt$$

$$\vartheta^2_0(r,t)=\sum_{n=1}^{\infty} R^2_n(r)\,T^2_n(t)=\sum_{n=1}^{\infty} c^2_{2n}\,d^2_{1n}\left(r^{2n}-r^{-2n}\right)\sin 2nt$$

Означимо $e^1_n=c^1_{2n}d^1_{1n}$, $e^2_n=c^2_{2n}d^2_{1n}$, па добијамо

$$\vartheta^1(r,t)=\sum_{n=1}^{\infty} e^1_n\left(r^{2n}-16r^{-2n}\right)\sin 2nt$$

$$\vartheta^2(r,t)=\sum_{n=1}^{\infty} e^2_n\left(r^{2n}-r^{-2n}\right)\sin 2nt$$

Коефицијенте e^1_n, e^2_n, $n\in\mathbb{N}$ добијамо из услова

$$\vartheta^1(1,t)=\sum_{n=1}^{\infty} e^1_n\cdot(1-16)\cdot\sin 2nt=\sin 2t$$

$$\vartheta^2(2,t)=\sum_{n=1}^{\infty} e^2_n\left(2^{2n}-2^{-2n}\right)\sin 2nt=\sin 4t.$$

Дакле, ф-је $\sin 2t, \sin 4t$ треба развити у Фуријеов ред на $[1,2]$ по "синусима". Како $\sin 2t, \sin 4t\in\{\sin 2nt \mid n\in\mathbb{N}\}$, то су ове ф-је већ у облику Фуријеовог реда.

Закључујемо да је

$$-15\cdot e^1_n=0 \text{ за } n\neq 1,\quad -15e^1_1=1\Rightarrow e^1_1=-\frac{1}{15}$$

$$e^2_n\left(2^{2n}-2^{-2n}\right)=0 \text{ за } n\neq 2,\quad e^2_2\left(2^4-2^{-4}\right)=1\Rightarrow e^2_2=\frac{1}{2^4-2^{-4}}$$

Дакле

$$\vartheta^1(r,t)=-\frac{1}{15}\left(r^2-16r^{-2}\right)\sin 2t$$

$$\vartheta^2(r,t)=\frac{1}{2^4-2^{-4}}\left(r^4-r^{-4}\right)\sin 4t$$

па је

$$u_h(r,t)=\vartheta^1(r,t)+\vartheta^2(r,t)=-\frac{1}{15}\left(r^2-16r^{-2}\right)\sin 2t+$$
$$+\frac{1}{2^4-2^{-4}}\left(r^4-r^{-4}\right)\sin 4t$$

На крају

$$u(r,t) = u_h(r,t) + u_p(r,t) = -\frac{1}{15}\left(r^2 - 16r^{-2}\right)\sin 2t + \frac{1}{2^4 - 2^{-4}}\left(r^4 - r^{-4}\right)\sin 4t +$$
$$+ \frac{1}{8}\left(r^3\cos^3 t + r^3 \cos t \sin^2 t\right)$$

Дакле

$$u(r,t) = -\frac{1}{15}\left(r^2 - 16r^{-2}\right)\sin 2t + \frac{1}{2^4 - 2^{-4}}\left(r^4 - r^{-4}\right)\sin 4t + \frac{1}{8} r^3 \cos t$$

5. Наћи ф-ју $u(r,\varphi)$ која је хармонијска на прстену $a<r<b$, $0<a<b$, и која задовољава граничне услове

$$u(a,\varphi)=0,\ u(b,\varphi)=\cos\varphi,\quad 0\le\varphi\le 2\pi$$

Решење:

Разматрамо задатак

$$\Delta u=0$$
$$u(a,\varphi)=0,\ u(b,\varphi)=\cos\varphi,\quad 0\le\varphi\le 2\pi$$

на $\Omega=\{(r,\varphi)\mid a<r<b, 0\le\varphi\le 2\pi\}$.

Пошто је ф-ја u непрекидна на прстену, она мора бити периодична по φ, па важи

$$u(r,\varphi)=u(r,\varphi+2\pi),\quad 0\le\varphi\le 2\pi$$

Претпоставимо да је $u(r,\varphi)=R(r)\Phi(\varphi)$. Добијамо

$$\frac{1}{r}R'(r)\Phi(\varphi)+R''(r)\Phi(\varphi)+\frac{1}{r^2}R(r)\Phi''(\varphi)=0$$
$$R(a)=0,\ \Phi(\varphi)=\Phi(\varphi+2\pi)$$

Одавде је

$$-\frac{r^2R''(r)+rR'(r)}{R(r)}=\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}=-\lambda$$

односно
$$r^2R''(r)+rR'(r)-\lambda R(r)=0$$
$$\Phi''(\varphi)+\lambda\Phi(\varphi)=0$$

1° $\lambda<0\Rightarrow$ Карактеристични полином је:

$$k^2+\lambda=0$$
$$k^2=-\lambda$$
$$k=\pm\sqrt{-\lambda}\Rightarrow\Phi(\varphi)=c_1e^{\sqrt{-\lambda}\varphi}+c_2e^{-\sqrt{-\lambda}\varphi}$$

$$\phi(\varphi+2\pi)=c_1 e^{\sqrt{-\lambda}(\varphi+2\pi)}+c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}(\varphi+2\pi)}$$

$$\phi(\varphi)=\phi(\varphi+2\pi)\Rightarrow c_1 e^{\sqrt{-\lambda}\varphi}+c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\varphi}=c_1 e^{\sqrt{-\lambda}(\varphi+2\pi)}+c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}(\varphi+2\pi)}$$

$$c_2=\frac{c_1 e^{2\sqrt{-\lambda}\varphi}\left(e^{2\sqrt{-\lambda}\pi}-1\right)}{1-e^{-2\sqrt{-\lambda}\pi}}\quad,\ \forall\varphi\in[0,2\pi]$$

Како $e^{2\sqrt{-\lambda}\varphi}$ није константна ф-ја на $[0,2\pi]$, то је

$c_1=c_2=0\Rightarrow\phi(\varphi)=0\Rightarrow u(r,\varphi)=0$ X

2° $\lambda=0\Rightarrow\phi''(\varphi)=0\Rightarrow\phi(\varphi)=a_1\varphi+b_1$

$$\phi(\varphi+2\pi)=a_1(\varphi+2\pi)+b_1$$

$$\phi(\varphi)=\phi(\varphi+2\pi)\Rightarrow \cancel{a_1\varphi}+\cancel{b_1}=\cancel{a_1\varphi}+2a_1\pi+\cancel{b_1}\Rightarrow 2a_1\pi=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow a_1=0$$

Дакле, $\phi(\varphi)=b_1$

Нађимо одговарајуће $R(r)$.

$$r^2R''(r)+rR'(r)=0$$

$$R''(r)=\frac{R'(r)}{r}$$

$$R'(r)=R_1(r)\Rightarrow R_1'(r)=\frac{R_1(r)}{r}$$

$$\frac{dR_1(r)}{R_1(r)}=\frac{dr}{r}\Rightarrow R_1(r)=cr$$

$$R_0'(r)=cr$$

$$R(r)=\frac{cr^2}{2}+d$$

$$R(r)=cr^2+d,$$

Даље је $R(a)=ca^2+d=0\Rightarrow d=-ca^2$

Дакле, $R(r)=cr^2-ca^2=c(r^2-a^2)$, па је

$$u(r,\varphi)=b_1c(r^2-a^2)=B(r^2-a^2)$$

где је $B=b_1c$.

3° $\lambda>0 \Rightarrow$ Карактеристични полином је

$$k^2+\lambda=0$$
$$k^2=-\lambda$$
$$k=\pm\sqrt{\lambda} \Rightarrow \Phi(\varphi)=c_1\cos\sqrt{\lambda}\,\varphi+c_2\sin\sqrt{\lambda}\,\varphi$$

$$\Phi(\varphi+2\pi)=c_1\cos\sqrt{\lambda}(\varphi+2\pi)+c_2\sin\sqrt{\lambda}(\varphi+2\pi)=$$
$$=c_1(\cos\sqrt{\lambda}\,\varphi\cos 2\sqrt{\lambda}\pi-\sin\sqrt{\lambda}\,\varphi\sin 2\sqrt{\lambda}\pi)+$$
$$+c_2(\sin\sqrt{\lambda}\,\varphi\cos 2\sqrt{\lambda}\pi+\cos\sqrt{\lambda}\,\varphi\sin 2\sqrt{\lambda}\pi)$$

$$\Phi(\varphi)=\Phi(\varphi+2\pi)\Rightarrow c_1\cos\sqrt{\lambda}\,\varphi+c_2\sin\sqrt{\lambda}\,\varphi=(c_1\cos 2\sqrt{\lambda}\pi+c_2\sin 2\sqrt{\lambda}\pi)\cos\sqrt{\lambda}\,\varphi+$$
$$+(-c_1\sin 2\sqrt{\lambda}\pi+c_2\cos 2\sqrt{\lambda}\pi)$$

Одавде добијамо

$$\left.\begin{array}{l} c_1=c_1\cos 2\sqrt{\lambda}\pi+c_2\sin 2\sqrt{\lambda}\pi \\ c_2=-c_1\sin 2\sqrt{\lambda}\pi+c_2\cos 2\sqrt{\lambda}\pi \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \cos 2\sqrt{\lambda}\pi=1 \\ \sin 2\sqrt{\lambda}\pi=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 2\sqrt{\lambda_n}\pi=2n\pi \\ \lambda_n=n^2 \end{array}$$

Дакле, $\Phi_n(\varphi)=c_{1n}\cos n\varphi+c_{2n}\sin n\varphi$.

Нађимо одговарајуће $R_n(r)$.

$$r^2R_n''(r)+rR_n'(r)-\lambda_nR_n(r)=0$$

Уведимо смену $r=e^z$, односно $z=\ln r$. Тада је

$$R_n'(r)=R_n'(z)\frac{1}{r}$$
$$R_n''(r)=R_n''(z)\cdot\frac{1}{r^2}-\frac{1}{r^2}R_n'(z)$$

па је

$$\frac{1}{\cancel{r^2}}\left(R_n''(z)-R_n'(z)\right)+k\cdot\frac{1}{\cancel{r}}R_n'(z)-\lambda_n R_n(z)=0$$

$$R_n''(z)-\lambda_n R_n(z)=0$$

Карактеристични полином је

$$k^2-\lambda_n=0$$
$$k^2=\lambda_n$$
$$k=\pm\sqrt{\lambda_n}\Rightarrow R_n(z)=d_{1n}e^{\sqrt{\lambda_n}z}+d_{2n}e^{-\sqrt{\lambda_n}z}$$
$$R_n(z)=d_{1n}(e^z)^{\sqrt{\lambda_n}}+d_{2n}(e^z)^{-\sqrt{\lambda_n}}$$

$$R_n(r)=d_{1n}r^n+d_{2n}r^{-n}$$

Даље, $R_n(a)=d_{1n}a^n+d_{2n}a^{-n}=0\Rightarrow d_{2n}=-d_{1n}a^{2n}$.

Дакле, $R_n(r)=d_{1n}(r^n-a^{2n}r^{-n})$.

Добили смо

$$u(r,\varphi)=B(r^2-a^2)+\sum_{n=1}^{\infty}R_n(r)\Phi_n(\varphi)$$

$$u(r,\varphi)=B(r^2-a^2)+\sum_{n=1}^{\infty}d_{1n}(r^n-a^{2n}r^{-n})(c_{1n}\cos n\varphi+c_{2n}\sin n\varphi)$$

$$u(r,\varphi)=B(r^2-a^2)+\sum_{n=1}^{\infty}e_{1n}(r^n-a^{2n}r^{-n})\cos n\varphi+\sum_{n=1}^{\infty}e_{2n}(r^n-a^{2n}r^{-n})\sin n\varphi$$

гдје је $e_{1n}=d_{1n}c_{1n}$, $e_{2n}=d_{1n}c_{2n}$. Коефицијенте $B, e_{1n}, e_{2n}, n\in\mathbb{N}$ добијамо из услова

$$u(b,\varphi)=B(b^2-a^2)+\sum_{n=1}^{\infty}e_{1n}(b^n-a^{2n}b^{-n})\cos n\varphi+\sum_{n=1}^{\infty}e_{2n}(b^n-a^{2n}b^{-n})\sin n\varphi=$$

$$=\cos\varphi$$

Ф-ју $\cos\varphi$ треба развити у Фуријеов ред на $[0,2\pi]$. Како $\cos\varphi\in\{\cos n\varphi, \sin n\varphi \mid n\in\mathbb{N}_0\}$, то је ова ф-ја већ у облику Фуријеовог реда, па закључујемо да је

$B=0$, $e_{1n}=0,\ n\neq 1,\ e_{2n}=0,\ n\in\mathbb{N}$ и

и $e_{11}(b^{1}-a^{2\cdot 1}\cdot b^{-1})=1 \Rightarrow e_{11}=\dfrac{b}{b^{2}-a^{2}}$

Добили смо

$$u(r,\varphi)=\frac{b}{b^{2}-a^{2}}(r-a^{2}r^{-1})\cdot\cos\varphi$$

6. Наћи хармонијску ф-ју $u(r,\varphi)$ која на кружном одсјечку $0<r<R$, $0<\varphi<\alpha$ задовољава граничне услове

$$u(r,0)=u(r,\alpha)=0,\quad 0\le r\le R$$
$$u(R,\varphi)=A\varphi\quad,\quad 0\le\varphi\le\alpha$$

Рјешење:

Претпоставимо да је $u(r,\varphi)=R(r)\Phi(\varphi)$. Задатак постаје

$$\frac{1}{r}R'(r)\Phi(\varphi)+R''(r)\Phi(\varphi)+\frac{1}{r^2}R(r)\Phi''(\varphi)=0$$
$$\Phi(0)=\Phi(\alpha)=0$$

Како је $u(r,0)=0$, $0\le r\le R$ то је и $u(0,0)=0$, па је $u(0,\varphi)=0$, $\forall\varphi\in[0,\alpha]$, па је $R(0)=0$.

Дакле, важи

$$-\frac{r^2R''(r)+rR'(r)}{R(r)}=\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}=-\lambda$$

односно
$$r^2R''(r)+rR'(r)-\lambda R(r)=0$$
$$\Phi''(\varphi)+\lambda\Phi(\varphi)=0$$

1° $\lambda<0\Rightarrow$ Карактеристични полином је

$$k^2+\lambda=0$$
$$k^2=-\lambda$$
$$k=\pm\sqrt{-\lambda}\Rightarrow\Phi(\varphi)=c_1e^{\sqrt{-\lambda}\varphi}+c_2e^{-\sqrt{-\lambda}\varphi}$$
$$\Phi(0)=c_1+c_2=0\Rightarrow c_2=-c_1$$
$$\Phi(\alpha)=c_1e^{\sqrt{-\lambda}\alpha}+c_2e^{-\sqrt{-\lambda}\alpha}=c_1(e^{\sqrt{-\lambda}\alpha}-e^{-\sqrt{-\lambda}\alpha})=0\Rightarrow c_1=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\Phi(\varphi)=0\Rightarrow u(r,\varphi)=0\quad\times$$

2° $\lambda=0\Rightarrow\Phi''(\varphi)=0\Rightarrow\Phi(\varphi)=a\varphi+b$

$$\left.\begin{array}{l}\Phi(0)=b=0\\ \Phi(\alpha)=a\alpha=0\Rightarrow a=0\end{array}\right\}\Rightarrow\Phi(\varphi)=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow u(r,\varphi)=0\quad\times$$

3° $\lambda<0 \Rightarrow$ Карактеристични полином је

$$k^2+\lambda=0$$
$$k^2=-\lambda$$
$$k=\pm i\sqrt{\lambda} \Rightarrow \phi(\varphi)=c_1\cos\sqrt{\lambda}\varphi+c_2\sin\sqrt{\lambda}\varphi$$

$$\phi(0)=c_1=0$$
$$\phi(\alpha)=c_2\sin\sqrt{\lambda}\alpha=0$$

За $c_2=0$ добијамо $\phi(\varphi)=0$, односно $u(r,\varphi)=0$. Како нас занимају нетривијална решења, то је $c_2\neq0 \Rightarrow \sin\sqrt{\lambda}\alpha=0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sqrt{\lambda_n}\,\alpha=n\pi \Rightarrow \lambda_n=\frac{n^2\pi^2}{\alpha^2}$$

Дакле, $\phi_n(\varphi)=c_{2n}\sin\frac{n\pi}{\alpha}\varphi$. Нађимо одговарајуће $R_n(r)$.

$$r^2R_n''(r)+rR_n'(r)-\lambda_nR_n(r)=0$$

Уведимо смену $r=e^z$, односно $z=\ln r$. Тада је

$$R_n'(r)=\frac{1}{r}R_n'(z)$$
$$R_n''(r)=\frac{1}{r^2}R_n''(z)-\frac{1}{r^2}R_n'(z)$$

па је

$$\cancel{r^2}\cdot\frac{1}{\cancel{r^2}}\left(R_n''(z)-R_n'(z)\right)+\cancel{r}\cdot\frac{1}{\cancel{r}}R_n'(z)-\lambda_nR_n(z)=0$$
$$R_n''(z)-\lambda_nR_n(z)=0$$

Карактеристични полином је

$$k^2-\lambda_n=0$$
$$k^2=\lambda_n$$
$$k=\pm\sqrt{\lambda_n} \Rightarrow R_n(z)=d_{1n}e^{\sqrt{\lambda_n}z}+d_{2n}e^{-\sqrt{\lambda_n}z}$$
$$R_n(z)=d_{1n}(e^z)^{\sqrt{\lambda_n}}+d_{2n}(e^z)^{-\sqrt{\lambda_n}}$$
$$R_n(r)=d_{1n}r^{\frac{n\pi}{\alpha}}+d_{2n}r^{-\frac{n\pi}{\alpha}}$$

Даље је $R_n(0)=0$ (тривијално)

Добили смо

$$u(r,\varphi)=\sum_{n=1}^{\infty} R_n(r)\Phi_n(\varphi)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(d_{1n} r^{\frac{n\pi}{\alpha}}+d_{2n} r^{-\frac{n\pi}{\alpha}}\right)\cdot c_{2n}\sin\frac{n\pi}{\alpha}\varphi$$

$$u(r,\varphi)=\sum_{n=1}^{\infty} e_{1n} r^{\frac{n\pi}{\alpha}}\sin\frac{n\pi}{\alpha}\varphi+\sum_{n=1}^{\infty} e_{2n} r^{-\frac{n\pi}{\alpha}}\sin\frac{n\pi}{\alpha}\varphi$$

$$u(r,\varphi)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(e_{1n} r^{\frac{n\pi}{\alpha}}+e_{2n} r^{-\frac{n\pi}{\alpha}}\right)\sin\frac{n\pi}{\alpha}\varphi$$

где је $e_{1n}=c_{2n}d_{1n}$, $e_{2n}=c_{2n}d_{2n}$.

Коефицијенте e_{1n}, e_{2n} добијамо из услова

$$u(R,\varphi)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(e_{1n} R^{\frac{n\pi}{\alpha}}+e_{2n} R^{-\frac{n\pi}{\alpha}}\right)\sin\frac{n\pi}{\alpha}\varphi=A\varphi$$

Дакле, ф-ју $f(\varphi)=A\varphi$ морамо развити у Фуријеов ред по "синусима". Непарно проширење ове ф-је на $[-\alpha,\alpha]$ је

$$F(\varphi)=A\varphi.$$

F - непарна $\Rightarrow a_0=0,\ a_n=0,\ n\in N$

$$b_n=\frac{1}{\alpha}\int_{-\alpha}^{\alpha}F(\varphi)\sin\frac{n\pi}{\alpha}\varphi\,d\varphi=\frac{2}{\alpha}\int_{0}^{\alpha}A\varphi\sin\frac{n\pi}{\alpha}\varphi\,d\varphi=$$

$$=\frac{2A}{\alpha}\int_{0}^{\alpha}\varphi\sin\frac{n\pi}{\alpha}\varphi\,d\varphi=\begin{bmatrix} u=\varphi & d\vartheta=\sin\frac{n\pi}{\alpha}\varphi\,d\varphi \\ du=d\vartheta & \vartheta=-\dfrac{\cos\frac{n\pi}{\alpha}\varphi}{\frac{n\pi}{\alpha}}\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{2A}{\alpha}\left(-\frac{\alpha\varphi}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{\alpha}\varphi\Big|_0^{\alpha}+\frac{\alpha}{n\pi}\int_0^{\alpha}\cos\frac{n\pi}{\alpha}\varphi\right)=\frac{2A}{\alpha}\left(\frac{-\alpha^2}{n\pi}\cos n\pi+\frac{\alpha^2}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{\alpha}\varphi\Big|_0^{\alpha}\right)=$$

$$=\frac{-2A\alpha}{n\pi}(-1)^n=\frac{(-1)^{n+1}A\alpha}{n\pi}$$

Добијамо $e_{1n}R^{\frac{n\pi}{\alpha}}+e_{2n}R^{-\frac{n\pi}{\alpha}}=\dfrac{(-1)^{n+1}A\alpha}{n\pi}\Rightarrow$

$$\Rightarrow e_{2n}=\frac{(-1)^{n+1}A\alpha R^{\frac{n\pi}{\alpha}}}{n\pi}-e_{1n}R^{\frac{2n\pi}{\alpha}}$$

Дакле

$$u(r,\varphi)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_{1n}\left(r^{\frac{n\pi}{\alpha}}-R^{\frac{2n\pi}{\alpha}}r^{-\frac{n\pi}{\alpha}}\right)+\frac{(-1)^{n+1}A\alpha R^{\frac{n\pi}{\alpha}}}{n\pi}\right)\sin\frac{n\pi}{\alpha}\varphi$$

где су $C_{1n}, n\in\mathbb{N}$ произвољни реални бројеви.